

Вероятностное моделирование надежности машин и систем на основе логарифмически – равномерного распределения

Л.В. Ефремов, ИПМаш РАН

Среди известных законов двухпараметрических распределений особое место занимает наиболее простое равномерное распределение, которое однозначно определяется двумя параметрами c и d .

Напомним основные формулы, характеризующие равномерное распределение случайной величины x [1].

Функции распределения:

плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 1/(d-c) & \text{при } c < x < d \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (1)$$

интегральная функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq c \\ (x-c)/(d-c) & \text{при } c < x < d \\ 1 & \text{при } x \geq d. \end{cases} \quad (2)$$

При изучении надежности из приведенных зависимостей вытекают следующие функции равномерного распределения наработки (времени) t до исследуемых событий, например отказов:

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq c \\ (d-t)/(d-c) & \text{при } c < t < d \\ 0 & \text{при } t \geq d; \end{cases} \quad (3)$$

интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1/(d-t) & \text{при } c < t < d \\ 0 & \text{при } 0 \leq t \leq c. \end{cases} \quad (4)$$

Свойства равномерного распределения характеризуются формулами таблицы 1 и графиками на рис. 1.

Из приведенных функций следуют такие особенности равномерного распределения.

В отличие от большинства законов оно не имеет бесконечных «хвостов» и ограничено справа величиной c , а слева - величиной d , при этом $d > c$. В указанных границах плотность распределения $f(t) = f = const$, интегральные функции $F(t)$ и $P(t)$ - линейны, а интенсивность отказов - возрастает от величины $f = 1/(d - c)$ до бесконечности.

Таблица 1. Свойства равномерного распределения

Характеристика	Функция
Характеристическая функция	$M_x(t) = \frac{e^{dt} - e^{ct}}{(d - c)t}$
Среднее	$t_s = \frac{c + d}{2}$
Медиана	$t_{50} = \frac{c + d}{2}$
Дисперсия	$\sigma^2 = \frac{(d - c)^2}{12}$
Коэффициент вариации	$V = \frac{d - c}{\sqrt{3}(d + c)}$

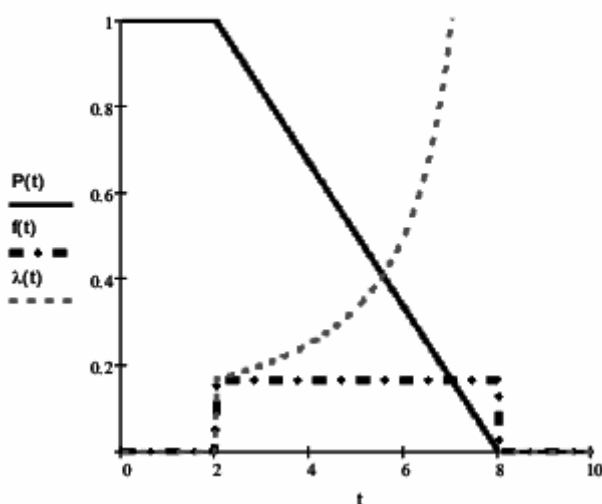


Рис.1 Функции равномерного распределения

Это распределение симметрично относительно среднего t_{cp} , которое определяется полу суммой крайних членов выборки. Важным свойством равномерного распределения является узкий диапазон изменения коэффи-

циента вариации в границах от нуля до значения $V \rightarrow 1/\sqrt{3}=0,5773$ при увеличении отношения d/c .

Это свойство позволяет успешно применять данный закон для оценки точности контроля различных физических величин с фиксированными границами их значений.

Простота рассмотренного закона также позволяет использовать его для оперативной оценки в первом приближении математического ожидания и дисперсии по данным о крайних членах выборки.

Более точно параметры этого распределения можно определить методом наименьших квадратов с помощью эмпирического распределения [2].

При этом применяется уравнение регрессии вида

$$Y = A - BX, \quad (5)$$

которое соответствует следующему виду линейного уравнения вероятности безотказной работы:

$$P(t) = (d - t)/(d - c) = \frac{d}{d - c} - \frac{1}{d - c}t \quad (6)$$

Отсюда следуют зависимости между параметрами уравнения регрессии и членами эмпирической выборки распределения $P_i - t_i$

$$\begin{aligned} x_i &= t_i, & y_i &= P_i, \\ A &= \frac{d}{d - c}, & B &= \frac{1}{d - c}. \end{aligned} \quad (7)$$

После определения методом наименьших квадратов постоянных A и B искомые величины находят по формулам

$$d = \frac{A}{B}, \quad c = \frac{A - 1}{B}. \quad (8)$$

Подробные сведения о равномерном распределении приведены здесь только лишь для того, что бы перейти к обоснованию с его помощью нового распределения, которое можно назвать логарифмически равномерным (далее - логравномерным) распределением.

По аналогии с известным логнормальным распределением это распределение получается в том случае, если в качестве случайной величины рассматривается не величина t , а ее логарифм $\ln(t)$.

Тогда основные функции распределения величины t вытекают непосредственно из приведенных выше функций равномерного распределения с учетом известных положений теории надежности.

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq c \\ \ln\left(\frac{d}{t}\right) / \ln\left(\frac{d}{c}\right) & \text{при } c < t < d \\ 0 & \text{при } t \geq d; \end{cases} \quad (9)$$

плотность вероятности

$$f(t) = \frac{d[1 - P(t)]}{dt} = \begin{cases} 1/t(\ln(d) - \ln(c)) = 1/t \ln\left(\frac{d}{c}\right) & \text{при } c < t < d \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (10)$$

интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \begin{cases} 1/t \ln\left(\frac{d}{t}\right) & \text{при } c < t < d \\ 0 & \text{при } d \leq t \leq c. \end{cases} \quad (11)$$

При оценке надежности машин большое значение имеет величина гамма-процентного ресурса $R(\gamma)$ (при допустимой вероятности безотказной работы γ).

Формула для его определения следует из формулы (9) и имеет вид

$$R(\gamma) = \exp\left[\ln(d) - \gamma \ln\left(\frac{d}{c}\right)\right] = d\left(\frac{c}{d}\right)^\gamma. \quad (12)$$

С помощью общих положений теории вероятности были установлены выражения для характеристической функции $ML_X(t)$, математического ожидания t_s , дисперсии σ^2 , коэффициента вариации V и медианы t_{50} (см. таблицу 2). В связи с тем, что эти функции определялись в математической среде MATHCAD, то формулы написаны с учетом принятых там обозначений. В частности характеристическая функция выражена через показательный интеграл второго рода $Ei_1(t)$, который решается с учетом постоянной Эйлера ε . Расчеты показали, что эта постоянная практически совпадает с величиной $\varepsilon = 1/\sqrt{3}$ (погрешность - всего 0,004%).

Тогда показательный интеграл второго рода можно вычислить по формуле

$$Ei_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \ln(x) - \sum_1^{100} \frac{(-n)^n x^n}{nn!}. \quad (13)$$

Хотя область применения логравномерного распределения еще требует своего специального изучения, приведенные выше зависимости позволили выявить ряд интересных особенностей.

Прежде всего отметим, что поведение функций этого распределения явно зависит от соотношения параметров d/c .

Таблица 2. Свойства логравномерного распределения

Характеристика	Функция
Характеристическая функция	$M_x(t) = \frac{Ei_1(-itc) - Ei_1(-itd)}{\ln\left(\frac{d}{c}\right)}$
Среднее	$t_s = \frac{d-c}{\ln\left(\frac{d}{c}\right)}$
Медиана	$t_{50} = \sqrt{cd}$
Дисперсия	$\sigma^2 = t_s \left(\frac{d+c}{2} + t_s \right)$
Коэффициент вариации	$V = \sqrt{\frac{d+c}{2t_s} - 1} = \sqrt{\ln\left(\sqrt{\frac{d}{c}}\right) \frac{\left(\frac{d}{c} + 1\right)}{\left(\frac{d}{c} - 1\right)}}$
Минимальная интенсивность отказов	$\lambda_{\min} = e/d$ при $t_{\min} = d/e$

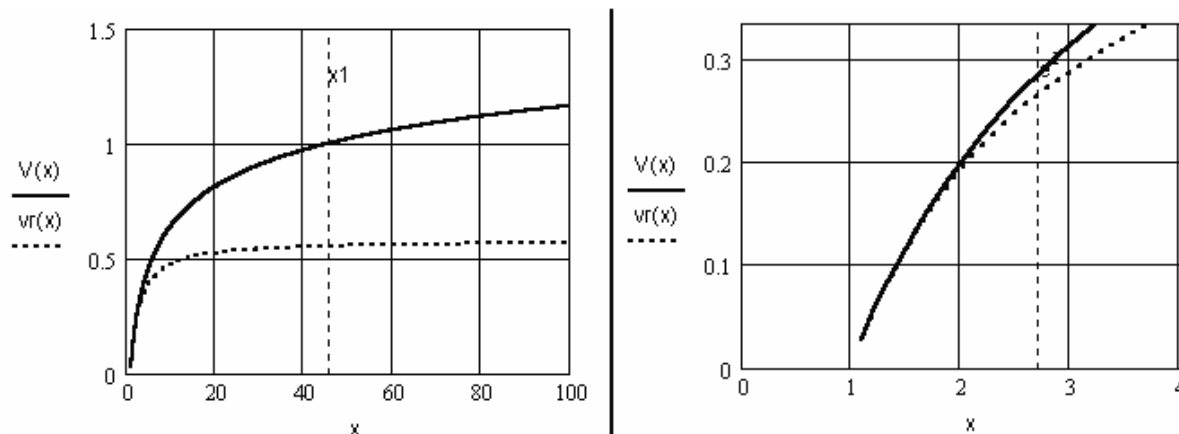


Рис. 2. Зависимость коэффициентов вариации логравномерного распределения $V(c,d)$ и равномерного распределения $vr(c,d)$ от $x = d/c$ для двух различных диапазонов его изменения.

На рис. 2 показаны зависимости коэффициентов вариации равномерного и логравномерного распределений от $x=d/c$. Анализ этих графиков показывает, что при небольших $d/c < 2$ коэффициенты вариации не превышают 0,2 и мало отличаются друг от друга. Такой же вывод следует из сравнения средних величин, хотя функции распределений несколько различаются (см. рис. 3а).

Поэтому предлагаемое распределение можно применять для оценки точности измерений наряду с другими законами, поскольку в этом случае приходится иметь дело с небольшими дисперсиями (коэффициент вариации менее 0,15).

Как показано на рис. 2 с повышением d/c от 5 до 100 и более коэффициент вариации логравномерного распределения возрастает до 1 (при $x = 46,5$) и более, резко отклоняясь от того же показателя равномерного распределения (который асимптотически приближается к 0,577).

Для демонстрации поведения функций логравномерного распределения на рис. 3 построены их графики при заметно различающихся значениях d (2 и 60) для $c = 1$ по специально разработанной программе в редакторе MATHCAD. По этой причине изображение формул на графиках не всегда совпадают с их написанием в тексте статьи.

Приведенные на этих рисунках функции вероятности безотказной работы и плотности распределения несколько напоминают экспоненциальное распределение в пределах границ c и d . Однако здесь в большей мере проявляется левосторонняя асимметрия и большая крутизна вероятности безотказной работы.

Особенностью этого распределения является поведение функции интенсивности отказов. Напомним физический смысл понятия об интенсивности отказов. Это есть отношение числа отказавших (погибших) объектов к объектам, которые еще не отказали (остались «живыми») в заданном интервале времени. При $t = c$ эта величина равна плотности распределения $1/c \ln(d/c)$.

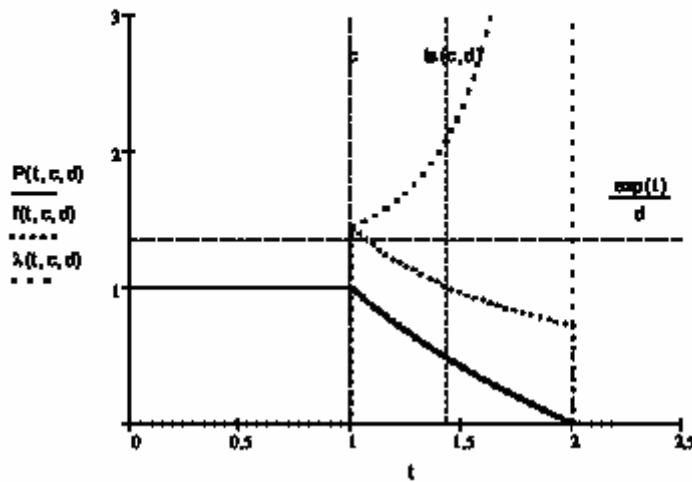
Установлено, что развитие функции $\lambda(t)$ так же зависит от отношения d/c . При небольших $d/c \leq e = 2,718$ рост $\lambda(t)$ начинается сразу от нижней границы распределения c (см. рис. 3а). При $d/c > e = 2,718$ с увеличением t образуется седловина при которой сначала наблюдается снижение интенсивности отказов до минимума $\lambda_{\min} = e/d$ при $t = d/e$, а затем интенсивность начинает возрастать сначала медленно, а затем, по мере приближения к d - очень быстро (см. рис. 3б).

График интенсивности отказов при очень больших отношениях d/c (например, 45 и более) напоминает хорошо известную из теории надежности характеристику интенсивности отказов в течении жизненного цикла объекта исследования.

С этой точки зрения жизненный цикл условно разбивается на три этапа:

- начальный и относительно небольшой этап «выжигания» дефектов изготовления или освоения производства продукции, когда наблюдается уменьшение потока отказов,
- основной этап с минимальной и стабильным уровнем интенсивности отказов,

a) При $c=1$ и $d=2$ среднее $ts(c,d)=1.443$ медиана $t50(c,d)=1.414$
 Коэфф. вариации $v(c,d)=0.199$ 80 - процентный ресурс $R2(\gamma,c,d)=1.149$
 Минимум интенсивности отказов $\frac{\exp(1)}{d}=1.359$ при $\exp(-1) \cdot d=0.736$



b) При $c=1$ и $d=60$ среднее $ts(c,d)=14.41$ медиана $t50(c,d)=7.746$
 Коэфф. вариации $v(c,d)=1.057$ 80 - процентный ресурс $R2(\gamma,c,d)=2.268$
 Минимум интенсивности отказов $\frac{\exp(1)}{d}=0.045$ при $\exp(-1) \cdot d=22.073$

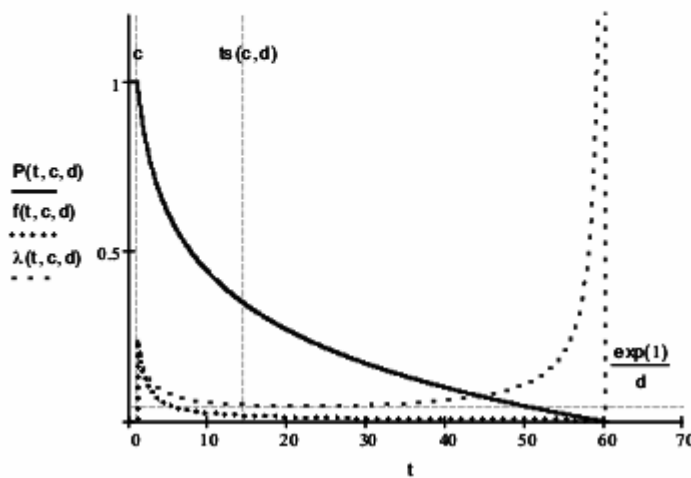


Рис. 3. Функции логнормального распределения при $d = 4$ (a) и $d = 60$ (b)

- заключительный этап эксплуатации, когда сказываются факторы старения (изнашивания) продукции, что приводит к резкому возрастанию интенсивности отказов.

На рис. 4 приведены графики интенсивности отказов при $c = 1$ и нескольких значениях d , на которых хорошо видны указанные этапы жизненного цикла особенно для больших d .

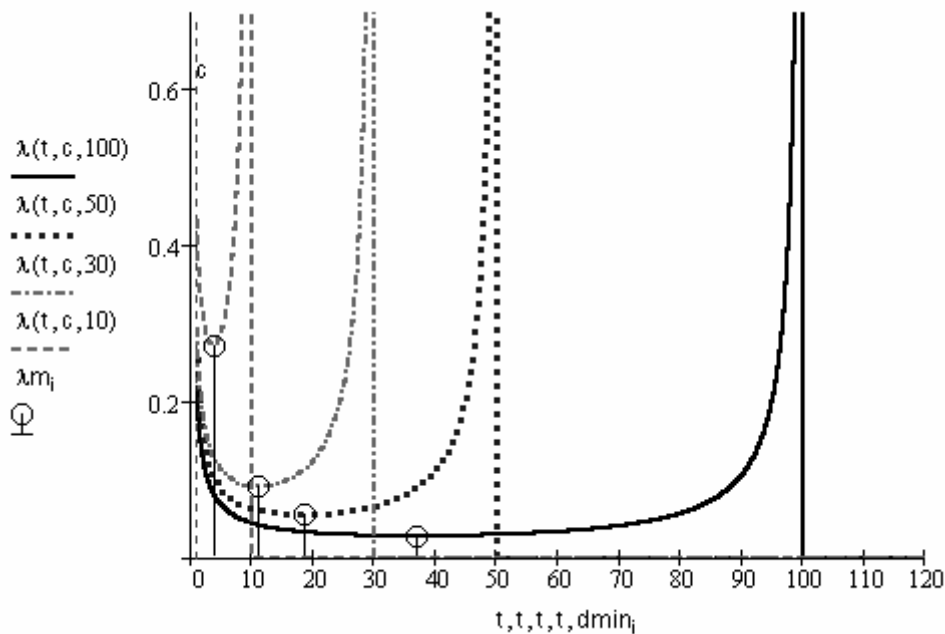


Рис. 4. Интенсивность отказов при разных величинах d (10, 30, 50 и 100). Примечание - кружками обозначены точки экстремума (минимума) кривых

Рекомендуется обратить внимание на кривую для $d = 100$. Если считать, что эта величина характеризует максимально-возможный срок жизни человека заданной популяции, то эта кривая удивительным образом соответствует демографическим закономерностям убыли населения различных возрастных групп.

На графике виден первый участок снижения интенсивности убыли населения детского возраста к 7-10 годам жизни.

После этого интенсивность убыли стабилизируется примерно до 70 - 75 - летнего возраста, достигая минимума к 37-38 годам.

После 80 лет жизни наблюдается резкий рост интенсивности убыли населения старшего возраста.

Возможно, что сходство вида этого графика с демографическими характеристиками не случайно. Это указывает на целесообразность изучения областей применения данного закона не только для оценки точности, но и для исследования случайных процессов в других областях науки.

Для этого рекомендуется проверять его соответствие эмпирическим выборкам по предлагаемой ниже методике, с применением описанного выше корреляционного анализа.

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} x_i &= \ln(t_i), & y_i &= P_i, \\ A &= \frac{\ln d}{\ln d - \ln c}, & B &= \frac{1}{\ln d - \ln c}. \end{aligned} \quad (14)$$

После определения методом наименьших квадратов коэффициента корреляции и постоянных A и B искомые величины находят по формулам:

$$d = \exp\left(\frac{A}{B}\right), \quad c = \exp\left(\frac{A-1}{B}\right). \quad (15)$$

В заключении рассмотрим еще одну задачу по изучению особенностей логнормального распределения.

Задача касается исследования зависимости так называемой энтропии распределения от его параметров c и d , которая в общем случае выражается интегралом:

$$H(c, d) = - \int_c^d f(t) \log_2(f(t)) dt. \quad (16)$$

В нашем случае этот интеграл и его решение выглядит следующим образом

$$H(c, d) = - \int_c^d \frac{1}{t \ln\left(\frac{d}{c}\right)} \log_2\left(\frac{1}{t \ln\left(\frac{d}{c}\right)}\right) dt = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left[\ln\left(\frac{d}{c}\right) \sqrt{cd}\right] \quad (17)$$

По этой формуле были построены графики (см. рис. 5), из которых следует, что при увеличении d энтропия идет из минус бесконечности и пересекает ось d на расстоянии L от исследуемого c . После этого наблюдается переход в кривую с небольшим увеличением энтропии в диапазоне значений от 4 до 6.

Корреляционным анализом доказано, что ординату нулевой энтропии можно с высокой точностью подсчитать по формуле

$$d_0 = I + c. \quad (18)$$

Это значит, что величина $L = I$, которая ощущается только при относительно небольших значениях c .

Для объяснения зависимости, приведенной на рис. 5, представим функцию (17) в следующем виде

$$H(c, d) = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left[\ln \left(\frac{d}{c} \right) \sqrt{cd} \right] = \frac{1}{\ln(2)} \left[\ln \ln \left(\frac{d}{c} \right) + \ln(t_{50}) \right]. \quad (19)$$

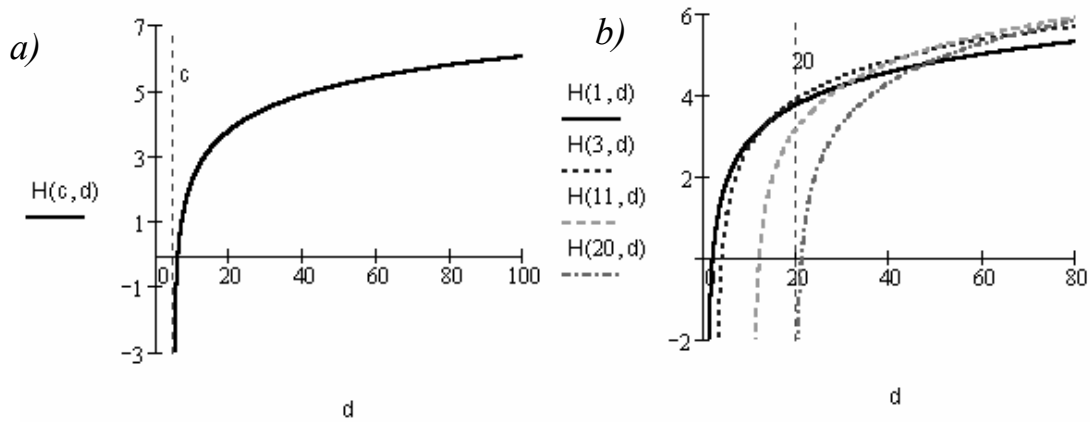


Рис. 5. Зависимость энтропии от параметра d .
а) - общий вид, б) - при разных значениях c (1, 3, 11 и 20).

Это выражение показывает, что снижение интенсивности увеличения энтропии при больших d/c связано с вхождением в формулу (18) двойного логарифма $\ln \ln \left(\frac{d}{c} \right)$.

Таковы первые результаты обоснования и изучения ряда свойств распределения, названного логарифмически равномерным. Можно надеется, что он найдет применение при исследовании точности измерений и решении других вероятностных задач наряду с ранее известными законами распределений.

В заключении автор выражает благодарность с.н.с. Овчаренко И.Е. за ценные замечания и рекомендации по математическому анализу энтропии и характеристической функции исследуемого закона распределения.

Литература

- 1.Справочник по надежности. Том 1. Перевод с английского Ю.Г. Епишина и Б.А. Смиренина. Под редакцией Б.Р. Левина. — Москва.: Издательство «Мир», 1969. —340 с.
- 2.Ефремов Л.В. Практика инженерного анализа надежности судовой техники. — Л.: Судостроение, 1980. — 178 с.